০৩ জটিল সংখ্যা

Complex Number

এই অধ্যায়ের গুরুত্বপূর্ণ সূত্রাবলি

❑ কাল্পনিক সংখ্যার ধারণা:

i হলো কাল্পনিক সংখ্যার একক। যেখানে, $i = \sqrt{-1}$

$i^2 = -1$

$i^3 = -i$

$i^4 = 1$

$i^{4n+1} = i$

$i^{4n+2} = i^2 = -1$

$i^{4n+3} = i^3 = -i$

$i^{4n} = (i^4)^n = 1$

$i^n + i^{n+1} + i^{n+2} + i^{n+3} = 0$; যেখানে, $n \in \mathbb{N}$

❑ মডুলাস ও আর্গুমেন্ট:

জটিল সংখ্যা $z = x + iy$ হলে, মডুলাস, $r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

(i) (x, y) ১ম চতুর্ভাগে অবস্থিত হলে,

আর্গুমেন্ট, $\theta = \arg(z) = \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

(ii) (x, y) ২য় চতুর্ভাগে অবস্থিত হলে,

আর্গুমেন্ট, $\theta = \arg(z) = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

(iii) (x, y) ৩য় চতুর্ভাগে অবস্থিত হলে,

আর্গুমেন্ট, $\theta = \arg(z) = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

(iv) (x, y) ৪র্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত হলে,

আর্গুমেন্ট, $\theta = \arg(z) = -\tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

আর্গুমেন্টের মুখ্যমানের সীমা $-\pi < \theta \le \pi$

❑ পোলার ও অয়লার আকৃতি:

$z = x + iy$ জটিল সংখ্যার মডুলাস r ও আর্গুমেন্ট θ হলে, জটিল সংখ্যাটির–

(i) পোলার আকৃতি, $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$

(ii) অয়লার আকৃতি, $z = re^{i\theta}$ [যেখানে, $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$]

❑ অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা:

$z = x + iy$ জটিল সংখ্যার অনুবন্ধী জটিল সংখ্যা, $\bar{z} = x - iy$

এখানে, z ও $\bar{z}$ এর মডুলাস পরস্পর সমান অর্থাৎ, $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$

❑ জটিল সংখ্যার ধর্মাবলি:

(i) $x + iy = 0$ হলে, $x = 0, y = 0$

(ii) যদি দুইটি জটিল সংখ্যা পরস্পর সমান হয়, তবে তাদের বাস্তব অংশদ্বয় ও কাল্পনিক অংশদ্বয় পরস্পর সমান হবে। অর্থাৎ, $x + iy = a + ib$ হলে, $x = a$ এবং $y = b$ হবে।

(iii) দুইটি অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার সমষ্টি ও গুণফল বাস্তব সংখ্যা।

$z + \bar{z} = 2x$, যা বাস্তব সংখ্যা

$z\bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$, যা বাস্তব সংখ্যা

(iv) অনুবন্ধী নয় এমন দুইটি জটিল সংখ্যার সমষ্টি, বিয়োগফল, গুণফল ও ভাগফল প্রত্যেকটিই জটিল সংখ্যা হবে।

(v) $z = x + iy$ জটিল সংখ্যা এবং n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হলে z^n জটিল সংখ্যা হবে। যেখানে, $|z^n| = |z|^n$

❑ পোলার আকারের দুইটি জটিল সংখ্যার গুণফল ও ভাগফল:

দুইটি জটিল সংখ্যা z_1 ও z_2 হলে–

(i) গুণফলের মডুলাস, $|z_1z_2| = |z_1||z_2|$

এবং গুণফলের আর্গুমেন্ট, $\arg(z_1z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$

(ii) ভাগফলের মডুলাস, $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

এবং ভাগফলের আর্গুমেন্ট, $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

❑ **জটিল সংখ্যার বর্গমূল:**

$a + ib$ এর বর্গমূল নির্ণয়ের জন্য $\frac{b}{2}$ কে এমন দুইটি উৎপাদক x ও y এ বিশ্লেষণ করতে হবে যেন $x^2 - y^2 = a$ হয়।

তাহলে, $\sqrt{a + ib} = \pm (x + iy)$ এবং $\sqrt{a - ib} = \pm (x - iy)$

Shortcut:

$a + ib$ এর বর্গমূল $= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{r + a} + i\sqrt{r - a}\right)$

$a - ib$ এর বর্গমূল $= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{r + a} - i\sqrt{r - a}\right)$ যেখানে, $r = \sqrt{a^2 + b^2}$

❑ **এককের ঘনমূল:**

এককের জটিল ঘনমূল দুইটির একটি ω হলে, অপরটি ω^2

যেখানে, $\omega = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, $\omega^2 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

$\bar{\omega} = \omega^2$

$\overline{\omega^2} = \omega$

$\omega^3 = 1$

$\omega^{3n} = 1$

$\omega^{3n+1} = \omega$

$\omega^{3n+2} = \omega^2$

এবং $\omega = \frac{1}{\omega^2}$

$1 + \omega + \omega^2 = 0$

$\omega^n + \omega^{n+1} + \omega^{n+2} = 0$; যেখানে, $n \in \mathbb{N}$

❑ **সঞ্চারপথ:** $z = x + iy$ হলে,

(i) $|z + a| = |z + b|$; সরলরেখা নির্দেশ করে।

(ii) $|z| = k$; বৃত্ত নির্দেশ করে যার কেন্দ্র $(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= k$

(iii) $|z - a| = k$; বৃত্ত নির্দেশ করে যার কেন্দ্র $(a, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ $= k$

(iv) $|az + k_1| = |bz + k_2|$; বৃত্ত নির্দেশ করে।

(v) $z\bar{z} = 0$; বিন্দু বৃত্ত নির্দেশ করে।

(vi) $\left|\frac{z + a}{z + b}\right| = k$; $k = 1$ হলে, সরলরেখা নির্দেশ করে। $k \neq 1$ হলে, বৃত্ত নির্দেশ করে।

(vii) $|z + k| = x$ অথবা $|z + k| = y$ হলে, পরাবৃত্ত নির্দেশ করে।

(viii) $|az + k| = x$ অথবা $|az + k| = y$ হলে, উপবৃত্ত নির্দেশ করে।

❑ $\sqrt{-a} \times \sqrt{-b} = -\sqrt{ab}$

❑ **জটিল সংখ্যার ঘনমূল:**

$\sqrt[3]{n^3} = n, n\omega, n\omega^2$

$\sqrt[3]{-n^3} = -n, -n\omega, -n\omega^2$

$\sqrt[3]{-in^3} = ni, ni\omega, ni\omega^2$

$\sqrt[3]{in^3} = -ni, -ni\omega, -ni\omega^2$

❑ **জটিল সংখ্যার চতুর্থ মূল:**

$\sqrt[4]{-n^2} = \pm\sqrt{\frac{n}{2}}(1 \pm i)$

$\sqrt[4]{n^4} = \pm n, \pm ni$

$\sqrt[4]{-n^4} = \pm\frac{n}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$

❑ **জটিল সংখ্যার ষষ্ঠ মূল:**

$\sqrt[6]{-n^3} = \pm\sqrt{n}\, i, \pm\sqrt{n}\, i\omega, \pm\sqrt{n}\, i\omega^2$

$\sqrt[6]{-n^2} = \pm\sqrt[3]{n}\, i, \pm\sqrt[3]{n}\, i\omega, \pm\sqrt[3]{n}\, i\omega^2$

$\sqrt[6]{n^6} = \pm n, \pm n\omega, \pm n\omega^2$

$\sqrt[6]{-n^6} = \pm ni, \pm ni\omega, \pm ni\omega^2$

সৃজনশীল (খ + গ) এর জন্য গুরুত্বপূর্ণ প্রশ্নোত্তর

1. $P = \frac{1+5i}{1+i}$, $Q = 3 - 2i$ হলে, $\overline{Q} - 2P$ এর মডুলাস ও আর্গুমেন্ট নির্ণয় কর। [দি. বো. ২৩]

সমাধান: দেওয়া আছে, $Q = 3 - 2i \therefore \overline{Q} = 3 + 2i$

এবং $P = \frac{1+5i}{1+i}$

$= \frac{(1+5i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$= \frac{1+5i-i-5i^2}{1^2+1}$

$= \frac{6+4i}{2} = 3 + 2i$

$\therefore \overline{Q} - 2P = 3 + 2i - 2(3 + 2i)$

$= 3 + 2i - 6 - 4i$

$= -3 - 2i$

$\therefore |\overline{Q} - 2P| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$

$\text{Arg}(\overline{Q} - 2P) = -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{-2}{-3}\right|$ [৩য় চতুর্ভাগে]

$= -\pi + \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$

$\therefore$ মডুলাস $= \sqrt{13}$ এবং আর্গুমেন্ট $= -\pi + \tan^{-1}\left(\frac{2}{3}\right)$ **(Ans.)**

2. $-1 + \sqrt{3}i$ [ঢা. বো. ২২; য. বো. ১৫, ০২; চ. বো. ০০; RUET 10-11, 09-10, 06-07; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২৩]

সমাধান: প্রদত্ত জটিল সংখ্যা $= -1 + \sqrt{3}i$.

$\therefore$ বাস্তব অংশ, $x = -1$, কাল্পনিক অংশ, $y = \sqrt{3}$

$\therefore r = \sqrt{1+3}$

$= \sqrt{4}$

$= 2$

জটিল সংখ্যাটির আর্গন্ড চিত্রে অবস্থান ২য় চতুর্ভাগে

$\therefore \theta = \pi - \tan^{-1}\left|\frac{y}{x}\right|$

$= \pi - \tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{-1}\right|$

$= \pi - \tan^{-1}\sqrt{3}$

$= \pi - \frac{\pi}{3}$

$= \frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ মডুলাস $= 2$ এবং আর্গুমেন্ট $= \frac{2\pi}{3}$ **(Ans.)**

$\therefore$ পোলার আকৃতি: $-1 + \sqrt{3}i$

$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$= 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ **(Ans.)**

3. $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\text{Arg}(z^2) = 2\text{Arg}(z)$ [কু. বো. ২৩]

সমাধান: $z = r\cos\theta + ir\sin\theta$

$\therefore \arg(z) = \tan^{-1}\left(\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}\right) = \tan^{-1}\tan\theta = \theta$

আবার, $z^2 = (r\cos\theta + ir\sin\theta)^2$

$= r^2\cos^2\theta + 2r^2i\cos\theta\sin\theta + i^2r^2\sin^2\theta$

$= r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta + r^2i\sin2\theta$

$= r^2\cos2\theta + r^2i\sin2\theta$

$\therefore \arg(z^2) = \tan^{-1}\left|\frac{r^2\sin2\theta}{r^2\cos2\theta}\right|$

$= \tan^{-1}\tan2\theta$

$= 2\theta = 2\arg(z)$ **(Proved)**

4. $-8 - 6\sqrt{-1}$ [দি. বো. ১৫, ১০; চ. বো. ১৪; য. বো. ১৪, ১০, ০৭; রা. বো. ১৩; কু. বো. ১২, ০৯; সি. বো. ১১; ব. বো. ০৭, ০১; ঢা. বো. ০৩]

সমাধান: ধরি, $\sqrt{-8 - 6\sqrt{-1}} = \pm(x - iy)$

$\Rightarrow \sqrt{-8 - 6i} = x - iy$

$\therefore -8 - 6i = x^2 - y^2 - i.2xy$

বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমতা করে পাই,

$x^2 - y^2 = -8$ ..... (i)

এবং $2xy = 6$

$\therefore xy = 3$

এখন, $(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2$

$= (-8)^2 + 4(3)^2$

$= 64 + 36$

$= 100$

$\therefore x^2 + y^2 = 10$ ..... (ii)

(i) + (ii) $\Rightarrow 2x^2 = 2$

$\Rightarrow x^2 = 1$

$\therefore x = 1$

(i) – (ii) $\Rightarrow -2y^2 = -18$

$\Rightarrow y^2 = 9$

$\therefore y = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল: $x - iy = \pm(1 - 3i)$ **(Ans.)**

বিকল্প সমাধান:

$-8 - 6\sqrt{-1}$

$= -8 - 6i$

$= 1 - 6i - 9$

$= 1^2 - 2 \times 1 \times 3i + 9i^2$

$= 1^2 - 2 \times 1 \times 3i + (3i)^2$

$= (1 - 2i)^2$

$\therefore \sqrt{-8 - 6\sqrt{-1}} = \pm(1 - 3i)$ **(Ans.)**

5. $z = \frac{1}{n}(l + im)$ একটি জটিল সংখ্যা। $l = m = 3$, $n = \sqrt{18}$ হলে $|z|$ এর ঘনমূলগুলোর যোগফল নির্ণয় কর। [রা. বো. ২২]

সমাধান: দেওয়া আছে, $l = m = 3$, $n = \sqrt{18}$

প্রদত্ত জটিল সংখ্যা, $z = \frac{1}{n}(l + im)$

$\therefore z = \frac{1}{\sqrt{18}}(3 + 3i)$

$= \frac{1}{3\sqrt{2}}(3 + 3i)$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i$

z এর মডুলাস, $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

$= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \sqrt{1} = 1$

ধরি, 1 এর ঘনমূল, $\sqrt[3]{1} = x$

$\Rightarrow 1 = x^3$

$\Rightarrow x^3 - 1 = 0$

$\therefore (x - 1)(x^2 + x + 1) = 0$

হয়, $(x - 1) = 0$ অথবা, $x^2 + x + 1 = 0$

$\Rightarrow x = 1$

$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \times 1 \times 1}}{2 \times 1}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

ঘনমূল তিনটির যোগফল $= 1 + \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} + \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$

$= \frac{2 - 1 + \sqrt{3}i - 1 - \sqrt{3}i}{2}$

$= \frac{2 - 2}{2}$

$= \frac{0}{2}$

$= 0$ **(Ans.)**

6. (i) মান নির্ণয় কর $\sqrt[4]{-81}$

[য. বো. ১১; ঢা. বো. ১০; ব. বো. ০৮; রা. বো. ০৪; মা. বো. ০২]

(ii) মান নির্ণয় কর $\sqrt[6]{-64}$

[কু. বো. ১৫; রা. বো. ১৪; দি. বো. ১১; ঢা. বো. ০৬; য. বো. ০৩; সি. বো. ০২; **RUET 10-11; CUET 03-04; BIT 00-01**]

সমাধান:

(i) ধরি, $\sqrt[4]{-81} = x$

$\Rightarrow x^4 = 81i^2$

$\Rightarrow x^2 = \pm 9i$

$\Rightarrow x^2 = \frac{9}{2}(\pm 2i)$

$\Rightarrow x^2 = \frac{9}{2}(1 \pm 2i - 1)$

$\Rightarrow x^2 = \frac{9}{2}(1 \pm 2i + i^2)$

$\Rightarrow x^2 = \frac{9}{2}(1 \pm i)^2$

$\Rightarrow x = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$ **(Ans.)**

Shortcut: $\sqrt[4]{-n^4} = \pm \frac{n}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$

$\therefore \sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{-3^4} = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$ **(Ans.)**

(ii) ধরি, $\sqrt[6]{-64} = x$

$\Rightarrow x^6 = -64$

$\Rightarrow (x^2)^3 + 4^3 = 0$

$\Rightarrow (x^2 + 4)(x^4 - 4x^2 + 16) = 0$

হয়, $x^2 + 4 = 0$

$\Rightarrow x^2 = -4$

$\Rightarrow x^2 = 4i^2$

$\Rightarrow x = \pm 2i$

অথবা, $x^4 - 4x^2 + 16 = 0$

$\Rightarrow x^2 = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 64}}{2 \times 1}$

$\Rightarrow x^2 = 2 \pm 2\sqrt{3}i$

$\Rightarrow x^2 = 3 \pm 2\sqrt{3}i + i^2 = (\sqrt{3} \pm i)^2$

$\therefore x = \pm(\sqrt{3} \pm i)$

$\therefore$ নির্ণেয় মান: $\pm 2i, \pm(\sqrt{3} \pm i)$ **(Ans.)**

Shortcut: $\sqrt[6]{-n^6} = \pm ni, \pm ni\omega, \pm ni\omega^2$

$\therefore \sqrt[6]{-64} = \sqrt[6]{-2^6} = \pm 2i, \pm 2i\omega, \pm 2i\omega^2$ **(Ans.)**

7. $f(x) = x - 2$ এবং $z = p + iq$ হলে, $|f(z + 6)| + |f(z - 2)| = 10$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথের সমীকরণ নির্ণয় কর। [সি. বো. ১৯]

সমাধান: দেওয়া আছে, $|f(z + 6)| + |f(z - 2)| = 10$

$\Rightarrow |z + 6 - 2| + |z - 2 - 2| = 10$

$\Rightarrow |z + 4| + |z - 4| = 10$

$\Rightarrow |p + iq - 4| + |p + iq + 4| = 10$

$\Rightarrow |(p - 4) + iq| + |(p + 4) + iq| = 10$

$\Rightarrow \sqrt{(p - 4)^2 + q^2} + \sqrt{(p + 4)^2 + q^2} = 10$

$\Rightarrow \sqrt{(p - 4)^2 + q^2} = 10 - \sqrt{(p + 4)^2 + q^2}$

$\Rightarrow p^2 - 8p + 16 + q^2 = 100 - 20\sqrt{(p+4)^2 + q^2} + p^2 + 8p + 16 + q^2$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

$\Rightarrow 16p + 100 = 20\sqrt{(p+4)^2 + q^2}$

$\Rightarrow 4p + 25 = 5\sqrt{p^2 + 8p + 16 + q^2}$

$\Rightarrow 16p^2 + 200p + 625 = 25(p^2 + 8p + 16 + q^2)$ [উভয় পক্ষকে বর্গ করে]

$\Rightarrow 16p^2 + 200p + 625 = 25p^2 + 200p + 400 + 25q^2$

$\Rightarrow 9p^2 + 25q^2 = 225$

$\Rightarrow \frac{p^2}{5^2} + \frac{q^2}{3^2} = 1$; যা উপবৃত্তের সমীকরণ। **(Ans.)**

8. $P = x + iy$ এবং $\arg\left(\frac{P-5}{P+2}\right) = \frac{\pi}{2}$ দৃশ্যকল্প-২ হতে প্রমাণ কর যে, $y^2 = (5-x)(x+2)$ [রা. বো. ২৫]

সমাধান: দেওয়া আছে, $P = x + iy$

এখন, $\frac{P-5}{P+2} = \frac{x+iy-5}{x+iy+2}$

$= \frac{\{(x-5)+iy\}\{(x+2)-iy\}}{(x+2)^2 + y^2}$

$= \frac{(x^2 - 3x - 10 + y^2) + i(xy + 2y - xy + 5y)}{x^2 + 4x + 4 + y^2}$

$= \frac{(x^2 - 3x - 10 + y^2) + i7y}{x^2 + y^2 + 4x + 4}$

$\therefore \arg\left(\frac{P-5}{P+2}\right) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \tan^{-1}\frac{\frac{7y}{x^2+y^2+4x+4}}{\frac{x^2-3x-10+y^2}{x^2+y^2+4x+4}} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \tan^{-1}\frac{7y}{x^2 - 3x - 10 + y^2} = \frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{7y}{x^2 - 3x - 10 + y^2} = \tan\frac{\pi}{2}$

$\Rightarrow \frac{7y}{x^2 - 3x - 10 + y^2} = \frac{1}{0}$

$\Rightarrow x^2 - 3x - 10 + y^2 = 0$

$\Rightarrow -y^2 = x^2 - 3x - 10$

$\Rightarrow -y = x^2 - 5x + 2x - 10$

$\Rightarrow -y^2 = x(x-5) + 2(x-5)$

$\therefore y^2 = (5-x)(x+2)$ **(Proved)**

9. যদি $x + y + z = 0$ এবং ω একের একটি কাল্পনিক ঘনমূল হয় তবে দেখাও যে, $(x + y\omega + z\omega^2)^3 + (x + y\omega^2 + z\omega)^3 = 27xyz$

[য. বো. ২৩, ১৫; ব. বো. ২৩, ১৩; রা. বো. ২৩, ১০, ০৭, ০২; সি. বো. ১০, ০৬; ঢা. বো. ০৭, ০৫]

সমাধান: L.H.S $= (x + y\omega + z\omega^2)^3 + (x + y\omega^2 + z\omega)^3$

$= a^3 + b^3$ [$a = x + y\omega + z\omega^2$ এবং $b = x + y\omega^2 + z\omega$ ধরে]

$= (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

$= (a+b)\{a^2 + (\omega + \omega^2)ab + b^2\omega^3\}$ [$\because \omega + \omega^2 = -1.\omega^3 = 1$]

$= (a+b)\{a(a + b\omega) + b\omega^2(a + b\omega)\}$

$= (a+b)(a + b\omega)(a + b\omega^2)$

$= (x + y\omega + z\omega^2 + x + y\omega^2 + z\omega)\{x + y\omega + z\omega^2 + (x + y\omega^2 + z\omega)\omega\}\{x + y\omega + z\omega^2 + (x + y\omega^2 + z\omega)\omega^2\}$

$= (x + x + y\omega + y\omega^2 + z\omega + z\omega^2)(x + x\omega + y\omega + y\omega^3 + z\omega^2 + z\omega^2)(x + x\omega^2 + y\omega + y\omega^4 + z\omega^2 + z\omega^3)$

$= \{2x + (\omega + \omega^2)y + z(\omega^2 + \omega)\}\{x(1+\omega) + y(1+\omega) + 2z\omega^2\}\{x(1+\omega^2) + 2y\omega + z(1+\omega^2)\}$

$= (2x - y - z)(2z - x - y)\omega^2(2y - z - x)\omega$

$= (2x + x)(2z + z)(2y + y)\omega^3$

[$\because x + y + z = 0$ হওয়ায় $x = -y - z$, $y = -x - z$, $z = -x - y$]

$= (3x)(3y)(3z)$

$= 27xyz$ = R.H.S **(Showed)**

10. $g(x) = p + qx + rx^2$ এবং $p + q + r = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\{g(\omega)\}^3 + \{g(\omega^2)\}^3 = a^x pqr$, যেখানে ω এককের কাল্পনিক ঘনমূল এবং $a = x = 3$. [ব. বো. ১৭; অনুরূপ প্রশ্ন: রা. বো. ২৩; য. বো. ২৩]

সমাধান: $g(x) = p + qx + rx^2$

$g(\omega) = p + q\omega + r\omega^2$

$g(\omega^2) = p + q\omega^2 + r\omega^4 = p + q\omega^2 + r\omega$ [$\because \omega^3 = 1$]

L.H.S

$= \{g(\omega)\}^3 + \{g(\omega^2)\}^3$

$= (p + q\omega + r\omega^2)^3 + (p + q\omega^2 + r\omega)^2$

$= b^3 + c^3$ [যেখানে, $b = p + q\omega + r\omega^2$, $c = p + q\omega^2 + r\omega$]

$= (b+c)(b^2 - bc + c^2)$

$= (b+c)\{b^2 + (\omega + \omega^2)bc + c^2\omega^3\}$

$= (b+c)\{b^2 + \omega bc + \omega^2 bc + c^2\omega^3\}$

$= (b+c)\{b(b + \omega c) + \omega^2 c(b + \omega c)\}$

$= (b+c)(b + \omega c)(b + \omega^2 c)$

$= (p + q\omega + r\omega^2 + p + q\omega^2 + r\omega) \times (p + q\omega + r\omega^2 + p\omega + q\omega^3 + r\omega^2) \times (p + q\omega + r\omega^2 + p\omega^2 + q\omega^4 + r\omega^3)$

$= \{2p + q(\omega + \omega^2) + r(\omega + \omega)\} \times \{p(1+\omega) + q(\omega + 1) + 2r\omega^2\} \times \{p(1+\omega^2) + q(\omega + \omega) + r(\omega^2 + 1)\}$

$= (2p - q - r)(-p\omega^2 - q\omega^2 + 2r\omega^2) \times (-p\omega + 2q\omega - r\omega)$

$= \{3p - (p + q + r)\}.\omega^2\{3r - (p + q + r)\}.\omega\{3q - (p + q + r)\}$

$= 3p.3r.3q.\omega^3$ [$\because p + q + r = 0$]

$= 3^3.pqr$

$= a^x pqr$ [$\because a = x = 3$]

(Proved)

11. $(a\omega^2 + b + c\omega)^3 + (a\omega + b + c\omega^2)^3 = 0$ হলে দেখাও যে, $a = \frac{1}{2}(b + c)$ অথবা, $b = \frac{1}{2}(c + a)$ অথবা, $c = \frac{1}{2}(a + b)$

[য. বো. ২৫; ব. বো. ১৯; কু. বো. ১৭, ০২; অনুরূপ প্রশ্ন: কু. বো. ২৫; সি. বো. ২৫; ঢা. বো. ২৩]

সমাধান: দেওয়া আছে, $(a\omega^2 + b + c\omega)^3 + (a\omega + b + c\omega^2)^3 = 0$

$\Rightarrow x^3 + y^3 = 0$ [$a\omega^2 + b + c\omega = x$ এবং $a\omega + b + c\omega^2 = y$ ধরে]

$\Rightarrow (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 0$

$\Rightarrow (x + y)\{x^2 + (\omega + \omega^2)xy + \omega^3 y^2\} = 0$

$\Rightarrow (x + y)(x^2 + \omega xy + \omega^2 xy + \omega^3 y^2) = 0$

$\Rightarrow (x + y)\{x(x + \omega y) + \omega^2 y(x + \omega y)\} = 0$

$\Rightarrow (x + y)(x + \omega y)(x + \omega^2 y) = 0$

$\Rightarrow (a\omega^2 + b + c\omega + a\omega + b + c\omega^2)(a\omega^2 + b + c\omega + a\omega^2 + b\omega + c\omega^3)(a\omega^2 + b + c\omega + a\omega^3 + b\omega^2 + c\omega^4) = 0$

$\Rightarrow \{a(\omega + \omega^2) + 2b + c(\omega + \omega^2)\}\{2a\omega^2 + b(1+\omega) + c(1+\omega)\}\{a(1+\omega^2) + b(1+\omega^2) + 2c\omega\} = 0$

$\Rightarrow (2b - a - c)(2a - b - c)\omega^2.(2c - a - b)\omega = 0$

$\Rightarrow (2b - a - c)(2a - b - c)(2c - a - b) = 0$

হয়, $2a - b - c = 0$	অথবা, $2b - a - c = 0$	অথবা, $2c - a - b = 0$
$\therefore a = \frac{1}{2}(b + c)$	$\therefore b = \frac{1}{2}(a + c)$	$\therefore c = \frac{1}{2}(a + b)$

(Showed)

12. $(a + b\omega + c\omega^2)^2 + (a\omega + b + c\omega^2)^2 + (a\omega + b\omega^2 + c)^2 = 0$ হলে দেখাও যে, $a = c$ অথবা, $b = \frac{1}{2}(a + c)$ [কু. বো. ১১]

সমাধানঃ দেওয়া আছে,

$$(a + b\omega + c\omega^2)^2 + (a\omega + b + c\omega^2)^2 + (a\omega + b\omega^2 + c)^2 = 0$$
$$\Rightarrow a^2 + b^2\omega^2 + c^2\omega^4 + 2ab\omega + 2bc\omega^3 + 2ca\omega^2 + a^2\omega^2 + b^2 + c^2\omega^4 + 2ab\omega + 2bc\omega^2 + 2ca\omega^3 + a^2\omega^2 + b^2\omega^4 + c^2 + 2ab\omega^3 + 2bc\omega^2 + 2ca\omega = 0$$
$$\Rightarrow a^2 + b^2\omega^2 + c^2\omega + 2ab\omega + 2bc + 2ca\omega^2 + a^2\omega^2 + b^2 + c^2\omega + 2ab\omega + 2bc\omega^2 + 2ca + a^2\omega^2 + b^2\omega + c^2 + 2ab + 2bc\omega^2 + 2ca\omega = 0$$
$$\Rightarrow a^2(1 + \omega^2 + \omega^2) + b^2(1 + \omega + \omega^2) + c^2(1 + \omega + \omega) + 2ab(1 + \omega + \omega) + 2bc(1 + \omega^2 + \omega^2) + 2ca(1 + \omega + \omega^2) = 0$$
$$\Rightarrow a^2(-\omega + \omega^2) + c^2(-\omega^2 + \omega) + 2ab(-\omega^2 + \omega) + 2bc(-\omega + \omega^2) = 0$$
$$\Rightarrow a^2(\omega^2 - \omega) - c^2(\omega^2 - \omega) - 2ab(\omega^2 - \omega) + 2bc(-\omega + \omega^2) = 0$$
$$\Rightarrow (a^2 - c^2 - 2ab + 2bc)(\omega^2 - \omega) = 0$$
$$\Rightarrow a^2 - c^2 - 2ab + 2bc = 0 \quad [\because (\omega^2 - \omega) \neq 0]$$
$$\Rightarrow (a + c)(a - c) - 2b(a - c) = 0 \quad [\because \omega^2 - \omega \neq 0]$$
$$\Rightarrow (a - c)(a + c - 2b) = 0$$

হয়, $a - c = 0$; $\therefore a = c$

অথবা, $a + c - 2b = 0$; $\therefore b = \frac{1}{2}(a + c)$

(Showed)

13. $(a + b\omega + c\omega^2)^2 + (a\omega + b + c\omega^2)^2 + (a\omega + b\omega^2 + c)^2 = 0$ হলে দেখাও যে, $a = c$ অথবা, $b = \frac{1}{2}(a + c)$ [কু. বো. ১১]

সমাধানঃ দেওয়া আছে,

$$(a + b\omega + c\omega^2)^2 + (a\omega + b + c\omega^2)^2 + (a\omega + b\omega^2 + c)^2 = 0$$
$$\Rightarrow a^2 + b^2\omega^2 + c^2\omega^4 + 2ab\omega + 2bc\omega^3 + 2ca\omega^2 + a^2\omega^2 + b^2 + c^2\omega^4 + 2ab\omega + 2bc\omega^2 + 2ca\omega^3 + a^2\omega^2 + b^2\omega^4 + c^2 + 2ab\omega^3 + 2bc\omega^2 + 2ca\omega = 0$$
$$\Rightarrow a^2 + b^2\omega^2 + c^2\omega + 2ab\omega + 2bc + 2ca\omega^2 + a^2\omega^2 + b^2 + c^2\omega + 2ab\omega + 2bc\omega^2 + 2ca + a^2\omega^2 + b^2\omega + c^2 + 2ab + 2bc\omega^2 + 2ca\omega = 0$$
$$\Rightarrow a^2(1 + \omega^2 + \omega^2) + b^2(1 + \omega + \omega^2) + c^2(1 + \omega + \omega) + 2ab(1 + \omega + \omega) + 2bc(1 + \omega^2 + \omega^2) + 2ca(1 + \omega + \omega^2) = 0$$
$$\Rightarrow a^2(-\omega + \omega^2) + c^2(-\omega^2 + \omega) + 2ab(-\omega^2 + \omega) + 2bc(-\omega + \omega^2) = 0$$
$$\Rightarrow a^2(\omega^2 - \omega) - c^2(\omega^2 - \omega) - 2ab(\omega^2 - \omega) + 2bc(-\omega + \omega^2) = 0$$
$$\Rightarrow (a^2 - c^2 - 2ab + 2bc)(\omega^2 - \omega) = 0$$
$$\Rightarrow a^2 - c^2 - 2ab + 2bc = 0 \quad [\because (\omega^2 - \omega) \neq 0]$$
$$\Rightarrow (a + c)(a - c) - 2b(a - c) = 0 \quad [\because \omega^2 - \omega \neq 0]$$
$$\Rightarrow (a - c)(a + c - 2b) = 0$$

হয়, $a - c = 0$; $\therefore a = c$

অথবা, $a + c - 2b = 0$; $\therefore b = \frac{1}{2}(a + c)$

(Showed)

14. প্রমাণ কর যে, $\left[\frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)\right]^n + \left[\frac{1}{2}\left(-1 - i\sqrt{3}\right)\right]^n = 2$ এবং -1, যখন n এর মান যথাক্রমে 3 দ্বারা বিভাজ্য 3 দ্বারা অবিভাজ্য।

[সি. বো. ২৫; রা. বো. ০৯; য. বো. ০৯; ঢা. বো. ০৮; কু. বো. ০৬; অনুরূপ প্রশ্নঃ ম. বো. ২৩]

সমাধানঃ আমরা জানি, $\omega = \frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)$ হলে, $\omega^2 = \frac{1}{2}\left(-1 - i\sqrt{3}\right)$

যেখানে এককের কাল্পনিক ঘনমূল ω

$$\text{L.H.S} = \left[\frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)\right]^n + \left[\frac{1}{2}\left(-1 - i\sqrt{3}\right)\right]^n = \omega^n + (\omega^2)^n$$

n এর মান 3 দ্বারা বিভাজ্য হলে,

ধরি, $n = 3m$, যেখানে $m \in \mathbb{N}$

$$\therefore \omega^n + (\omega^2)^n = \omega^{3m} + (\omega^2)^{3m}$$
$$= (\omega^3)^m + (\omega^3)^{2m} = 1 + 1 = 2$$

n এর মান 3 দ্বারা অবিভাজ্য হলে ধরি,

$n = 3m + 1$ অথবা, $n = 3m + 2$, যেখানে $m \in \mathbb{N}$

$n = 3m + 2$ হলে,

$$\omega^n + (\omega^2)^n = \omega^{3m+2} + (\omega^2)^{3m+2}$$
$$= \omega^{3m}.\ \omega^2 + \omega^{6m}.\ \omega^4 = \omega^2 + \omega = -1$$

একইভাবে, $n = 3m + 1$ হলে, $\omega^n + (\omega^2)^n = -1$

$$\therefore \left[\frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)\right]^n + \left[\frac{1}{2}\left(-1 - i\sqrt{3}\right)\right]^n = 2 \text{ অথবা } -1;$$

যখন n এর মান 3 দ্বারা যথাক্রমে বিভাজ্য এবং 3 দ্বারা অবিভাজ্য।

(Proved)

15. যদি $(1 + x + x^2)^n = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ldots\ldots + p_{2n}x^{2n}$ হয়, তবে দেখাও যে, $p_0 + p_3 + p_6 + \ldots\ldots = 3^{n-1}$ [ম. বো. ২৫; চ. বো. ২৩, ০৮]

সমাধানঃ দেওয়া আছে,

$$(1 + x + x^2)^n = p_0 + p_1x + p_2x^2 + \ldots\ldots + p_{2n}x^{2n};\ \ldots\ldots \text{(i)}$$

এখন, (i) নং এ $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$$(1 + 1 + 1)^n = p_0 + p_1 + p_2 + \ldots\ldots$$
$$\therefore p_0 + p_1 + p_2 + \ldots\ldots = 3^n \ \ldots\ldots \text{(ii)}$$

আবার, (i) নং এ $x = \omega$ বসিয়ে পাই,

$$(1 + \omega + \omega^2)^n = p_0 + p_1\omega + p_2\omega^2 + p_3\omega^3 + p_4\omega^4 + \ldots\ldots$$
$$\Rightarrow p_0 + p_1\omega + p_2\omega^2 + p_3 + p_4\omega + \ldots\ldots = 0 \ \ldots\ldots \text{(iii)}$$

আবার, (i) নং এ $x = \omega^2$ বসিয়ে পাই,

এবং $(1 + \omega^2 + \omega^4)^n = p_0 + p_1\omega^2 + p_2\omega^4 + p_3\omega^6 + \ldots\ldots$

$$\therefore p_0 + p_1\omega^2 + p_2\omega + p_3 + \ldots\ldots = 0 \ \ldots\ldots \text{(iv)}$$

(ii) + (iii) + (iv) $\Rightarrow$

$$3p_0 + p_1(1 + \omega + \omega^2) + p_2(1 + \omega^2 + \omega) + 3p_3 + p_4(1 + \omega + \omega^2) + \ldots\ldots = 3^n$$
$$\Rightarrow 3p_0 + 3p_3 + 3p_6 + \ldots\ldots = 3^n$$
$$\Rightarrow p_0 + p_3 + p_6 + \ldots\ldots = \frac{3^n}{3}$$
$$\therefore p_0 + p_3 + p_6 + \ldots\ldots = 3^{n-1}$$ **(Showed)**

16. $\sqrt{2}x = 1 + i$ হলে দেখাও যে, $x^6 + x^4 + x^2 + 1 = 0$

[চ. বো. ১৫; ব. বো. ১১]

সমাধান: দেওয়া আছে, $\sqrt{2}x = 1 + i$

$\Rightarrow 2x^2 = 1 + 2i + i^2$

$\Rightarrow 2x^2 = 1 + 2i - 1$

$\Rightarrow 2x^2 = 2i$

$\therefore x^2 = i$

L.H.S $= x^6 + x^4 + x^2 + 1$

$= (x^2)^3 + (x^2)^2 + x^2 + 1$

$= i^3 + i^2 + i + 1$

$= -i - 1 + i + 1$

$= 0 =$ R.H.S **(Showed)**

17. $\sqrt[3]{a + ib} = x + iy$ হলে দেখাও যে, $4(x^2 - y^2) = \frac{a}{x} + \frac{b}{y}$

[য. বো. ১৪, ১২, ০৯; চ. বো. ১৪; রা. বো. ১৩, ০৭, ০৪; সি. বো. ১৩, ০৭; কু. বো. ১৩, ০৯, ০৩; দি. বো. ১৩; ব. বো. ১২, ০৮; ঢা. বো. ১১, ০৬, ০৪, ০২; মা. বো. ০৬; RUET 11-12, 08-09, 06-07; BUET 11-12, 08-09; KUET 06-07; BUTex 05-06; BIT 02-03; অনুরূপ প্রশ্ন: ঢা. বো. ২৩; য. বো. ২২]

সমাধান: দেওয়া আছে, $\sqrt[3]{a + ib} = x + iy$

$\Rightarrow a + ib = (x + iy)^3$

$\Rightarrow a + ib = x^3 + 3x^2iy + 3xi^2y^2 + i^3y^3$

$\Rightarrow a + ib = x^3 + 3ix^2y - 3xy^2 - iy^3$

$\therefore a + ib = (x^3 - 3xy^2) + i(3x^2y - y^3)$

এখন, বাস্তব ও কাল্পনিক অংশ সমতা করে পাই,

$\therefore a = x^3 - 3xy^2$ এবং $b = 3x^2y - y^3$

$\therefore$ R.H.S $= \frac{a}{x} + \frac{b}{y}$

$= \frac{x^3 - 3xy^2}{x} + \frac{3x^2y - y^3}{y}$

$= x^2 - 3y^2 + 3x^2 - y^2$

$= 4(x^2 - y^2) =$ L.H.S **(Showed)**

18. $x : y = a + ib : c + id$ হলে দেখাও যে, $(c^2 + d^2)x^2 - 2(ac + bd)xy + (a^2 + b^2)y^2 = 0$

[কু. বো. ২৫; ১৪, ০৪, ০১; দি. বো. ১৪, ১২; ব. বো. ১৪, ০৯; ঢা. বো. ১৪; মা. বো. ১১, ০৫, ০৩; য. বো. ১০, ০৭, ০২; সি. বো. ০৯, ০৫, ০২; রা. বো. ০৩; BUET 04-05]

সমাধান: দেওয়া আছে,

$x : y = a + ib : c + id$

$\Rightarrow \frac{x}{y} = \frac{a + ib}{c + id}$

$\Rightarrow cx + idx = ay + iby$

$\Rightarrow cx - ay = i(by - dx)$

$\Rightarrow (cx - ay)^2 = i^2(by - dx)^2$

$\Rightarrow c^2x^2 - 2acxy + a^2y^2 = -(b^2y^2 - 2bdxy + d^2x^2)$

$\Rightarrow c^2x^2 - 2acxy + a^2y^2 + b^2y^2 - 2bdxy + d^2x^2 = 0$

$\therefore (c^2 + d^2)x^2 - 2(ac + bd)xy + (a^2 + b^2)y^2 = 0$ **(Showed)**

19. $a, b \in \mathbb{R}$ এবং $a^2 + b^2 = 1$ হলে দেখাও যে, x এর একটি বাস্তব মান $\frac{1 - ix}{1 + ix} = a - ib$ সমীকরণকে সিদ্ধ করে।

[য. বো. ২৫; চ. বো. ২৩, ১২; ম. বো. ২২; ঢা. বো. ১৫, ১৪, ০৭; কু. বো. ১৪, ১০; মা. বো. ১৪; সি. বো. ১২, ০৮, ০৪; রা. বো. ১২, ০৬, ০৩; দি. বো. ১২]

সমাধান: দেওয়া আছে,

$\frac{1 - ix}{1 + ix} = a - ib$

$\Rightarrow 1 - ix = (a - ib)(1 + ix)$

$\Rightarrow a + iax - ib - i^2bx = 1 - ix$

$\Rightarrow iax + bx + ix = 1 - a + ib$

$\Rightarrow x\{b + i(a + 1)\} = 1 - a + ib$

$\therefore x = \frac{(1 - a) + ib}{b + i(a + 1)} = \frac{\{(1 - a) + ib\}\{b - i(a + 1)\}}{\{b + i(a + 1)\}\{b - i(a + 1)\}}$

$= \frac{b(1 - a) + ib^2 - i(1 - a)(1 + a) - i^2b(1 + a)}{b^2 + (a + 1)^2}$

$= \frac{b(1 - a) + b(a + 1) + i(a^2 + b^2 - 1)}{b^2 + (a + 1)^2}$

$= \frac{b(1 - a) + b(a + 1)}{b^2 + a^2 + 2a + 1}$

$= \frac{b - ab + ab + b}{1 + 2a + 1}$ $[\because a^2 + b^2 = 1]$

$= \frac{2b}{2 + 2a}$

$= \frac{2b}{2(a + 1)}$

$= \frac{b}{a + 1}$; যা একটি বাস্তব সংখ্যা। **(Showed)**

20. $(1 + x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ হলে দেখাও যে, $(a_0 - a_2 + a_4 - \ldots)^2 + (a_1 - a_3 + a_5 - \ldots)^2 = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n = 2^n$

[চ. বো. ২৫; কু. বো. ১২; ব. বো. ০৩; ঢা. বো. ০১; অনুরূপ প্রশ্ন: চ. বো. ২২]

সমাধান: দেওয়া আছে,

$(1 + x)^n = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \ldots + a_nx^n$ ..... (i)

(i) নং এ $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$2^n = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \ldots\ldots + a_n$; ..... (ii)

(i) নং এ $x = i$ বসিয়ে পাই,

$(1 + i)^n = a_0 + a_1i + a_2i^2 + a_3i^3 + a_4i^4 + \ldots\ldots$

$= a_0 + a_1i - a_2 - a_3i + a_4 + \ldots\ldots$

$= (a_0 - a_2 + a_1 \ldots\ldots) + i(a_1 - a_3 + a_5 - \ldots\ldots)$ ..... (iii)

আবার, (i) নং এ $x = -i$ বসিয়ে পাই,

$(1 - i)^n = a_0 - a_1i - a_2i^2 - a_3i^3 + a_4i^4 + \ldots\ldots$

$= a_0 - a_1i - a_2 + a_3i + a_4i + \ldots\ldots$

$= (a_0 - a_2 + a_4 - \ldots\ldots) - i(a_1 - a_3 + a_5 - \ldots\ldots)$ ..... (iv)

(iii) ও (iv) গুণ করে, $(1 + i)^n \times (1 - i)^n$

$= (a_0 - a_2 + a_4 - \ldots\ldots)^2 - i^2(a_1 - a_3 + a_5 - \ldots\ldots)^2$

$\Rightarrow (1^2 - i^2)^n = (a_0 - a_2 + a_4 - \ldots\ldots)^2 + (a_1 - a_3 + a_5 - \ldots\ldots)^2$

$\Rightarrow 2^n = (a_0 - a_2 + a_4 - \ldots\ldots)^2 + (a_1 - a_3 + a_5 - \ldots\ldots)^2$ ..... (v)

সমীকরণ (ii) ও (v) হতে পাই,

$(a_0 - a_2 + a_4 - \ldots\ldots)^2 + (a_1 - a_3 + a_5 - \ldots\ldots)^2$

$= a_0 + a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n = 2^n$ **(Showed)**

০৩ জটিল সংখ্যা

Complex Number

বোর্ড পরীক্ষার জন্য গুরুত্বপূর্ণ বহুনির্বাচনি প্রশ্ন

1. $n \in N$ হলে i^{16n+5} এর মান কোনটি? [কু. বো. ২৫]

ক $-i$ খ i গ 1 ঘ -1

উত্তর: খ i

ব্যাখ্যা: $n = 0$ বসিয়ে পাই, $i^{16\times0+5} = i^5 = i$

2. কাল্পনিক সংখ্যা i এবং $n \in \mathbb{N}$ এর জন্য $i^{4n} - i + i^{4n+1} - 1$ এর মান কত? [সম্মিলিত বো. '১৮]

ক $-i$ খ i

গ 0 ঘ 1

উত্তর: গ 0

ব্যাখ্যা: $i^{4n} - i + i^{4n+1} - 1$

$= 1 - i + i^{4n}.i - 1$ $[i^{4n} = 1]$

$= 0 - i + i$

$= 0$

3. $i^5 + i^6 + i^7 + i^8 + i^9$ এর মান কত? [কু. বো. '২৩]

ক -1 খ $-i$

গ 1 ঘ i

উত্তর: ঘ i

ব্যাখ্যা: $i^5 + i^6 + i^7 + i^8 + i^9 = i$ [Using EX/CW Calculator]

বিকল্প সমাধান: আমরা জানি, $i + i^2 + i^3 + i^4 = 0$

অর্থাৎ, i এর চারটি ক্রমিক পাওয়ার সম্বলিত পদের যোগফল $= 0$

$\therefore$ এখানে, $i^5 + i^6 + i^7 + i^8 + i^9 = 0 + i^9 = i$

4. $i^m + i^{m+1} + i^{m+2} + i^{m+3}$ = কত? $(m \in \mathbb{Z})$ [রা. বো. '১৭]

ক -1 খ $-i$ গ 0 ঘ i

উত্তর: গ 0

ব্যাখ্যা: i এর চারটি ক্রমিক পাওয়ার সম্বলিত পদের যোগফল $= 0$

$\therefore i^m + i^{m+1} + i^{m+2} + i^{m+3} = 0$

5. $i^7 + i^9 + i^{11} + i^{13}$ এর মান কত? [দি. বো. '২২]

ক -1 খ 1

গ $-i$ ঘ 0

উত্তর: ঘ 0

ব্যাখ্যা: $i^7 + i^9 = 0$ এবং $i^{11} + i^{13} = 0$

$\therefore i^7 + i^9 + i^{11} + i^{13} = 0$

Note: i এর পাওয়ার দুটি ক্রমিক জোড় সংখ্যা/ক্রমিক বিজোড় সংখ্যা হলে এদের যোগফল শূন্য হয়।

যেমন $i^2 + i^4 = 0$; $i + i^3 = 0$

EX/CW Calculator দিয়ে Direct $i^7 + i^9 + i^{11} + i^{13}$ এর মান বের করে ফেলা যায়। Calculator অবশ্যই Complex Mode এ রাখতে হবে।

6. $i^{-70} + 1$ এর মান কোনটি? [য. বো. '১৭]

ক 0 খ 2

গ $1 - i$ ঘ $1 + i$

উত্তর: ক 0

ব্যাখ্যা: $\frac{1}{i^{70}} + 1 = \frac{1}{i^2} + 1 = \frac{1}{-1} + 1 = 0$

Note: EX/CW Calculator দিয়ে Direct মান বের করে ফেলা যায়। অবশ্যই Complex Mode ব্যবহার করতে হবে।

7. $\sqrt{-3} \times \sqrt{-1}$ এর মান কোনটি? [রা. বো. '২২]

ক $\sqrt{3}i$ খ $\pm\sqrt{3}$

গ $-\sqrt{3}$ ঘ $\sqrt{3}$

উত্তর: গ $-\sqrt{3}$

ব্যাখ্যা: Using Calculator in Complex Mode

❖ **উদ্দীপকের আলোকে 8 নং প্রশ্নের উত্তর দাও।**

$$z = \frac{2-i}{1+i}$$

8. z-এর কাল্পনিক অংশ কোনটি? [দি. বো. ২৫]

ক $-\frac{3}{2}$ খ $-\frac{1}{2}$ গ $\frac{1}{2}$ ঘ $\frac{3}{2}$

উত্তর: ক $-\frac{3}{2}$

ব্যাখ্যা: $z = \frac{2-i}{1+i} = \frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}$

$= \frac{2-2i-i+i^2}{1^2-i^2}$

$= \frac{2-1-3i}{2}$

$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$

$\therefore$ কাল্পনিক অংশ $-\frac{3}{2}$

9. $i^2 = -1$ হলে, $\frac{-i - i^{-5}}{2i^{-5} + i}$ এর মান– [চ. বো. '২২]

ক -2 খ 0
গ $\frac{1}{2}$ ঘ 2

উত্তর: খ 0

ব্যাখ্যা: $\frac{-i - \frac{1}{i^5}}{\frac{2}{i^5} + i} = \frac{-i - \frac{1}{i}}{\frac{2}{i} + i} = \frac{-i^2 - 1}{2 + i^2} = \frac{1 - 1}{2 - 1} = 0$

Note: EX/CW Calculator দিয়ে Direct মান বের করে ফেলা যায়। অবশ্যই Complex Mode ব্যবহার করতে হবে।

10. i^{-47} এর আর্গুমেন্ট কত? [ম. বো. ২৫]

ক $\frac{\pi}{2}$ খ $-\frac{\pi}{2}$ গ $\frac{3\pi}{2}$ ঘ $-\frac{3\pi}{2}$

উত্তর: ক $\frac{\pi}{2}$

ব্যাখ্যা: i^{-47}

$= (i^{47})^{-1} = (i^3)^{-1} = (-i)^{-1} = -\frac{(-i^2)}{i} = i$

i এর মুখ্য আর্গুমেন্ট $\frac{\pi}{2}$। শুধু আর্গুমেন্ট বললে $\frac{\pi}{2}$ ও $-\frac{3\pi}{2}$ উভয়ই সঠিক উত্তর হতে পারে।

11. $\left|\frac{1-i}{1+i}\right|$ এর মান কোনটি? [য. বো. ২৫]

ক 0 খ 1
গ $\sqrt{2}$ ঘ i

উত্তর: খ 1

ব্যাখ্যা: $\left|\frac{1-i}{1+i}\right| = \left|\frac{1-i}{1+i}\right| = \frac{\sqrt{1^2 + (-1)^2}}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = 1$

12. $z = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{7})$ হলে, $z - \bar{z}$ এর মান কত? [রা. বো. '২৩]

ক $-i\sqrt{7}$ খ -1 গ $i\sqrt{7}$ ঘ 1

উত্তর: ক $-i\sqrt{7}$

ব্যাখ্যা: $\bar{z} = \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{7})$

$\therefore z - \bar{z} = \frac{1}{2}(-1 - i\sqrt{7}) - \frac{1}{2}(-1 + i\sqrt{7})$

$= -i\sqrt{7}$ [Using Calculator]

13. $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$ এর মুখ্য আর্গুমেন্ট কত? [কু. বো. '২৩]

ক $-\frac{2\pi}{3}$ খ $-\frac{\pi}{3}$
গ $\frac{\pi}{3}$ ঘ $\frac{2\pi}{3}$

উত্তর: ক $-\frac{2\pi}{3}$

ব্যাখ্যা: $\arg\left(\frac{-1 - \sqrt{-3}i}{2}\right) = -\frac{2\pi}{3}$ [Using Calculator]

14. $z_1 = 1 + 2i$ এবং $z_2 = 3 + i$, হলে $\bar{z_1} - z_2$ এর মডুলাস হল– [ঢা. বো. '২২]

ক $\sqrt{5}$ খ $\sqrt{13}$
গ $\sqrt{25}$ ঘ $5\sqrt{2}$

উত্তর: খ $\sqrt{13}$

ব্যাখ্যা: $\bar{z_1} - z_2 = 1 - 2i - 3 - i = -2 - 3i$

$|\bar{z_1} - z_2| = \sqrt{4 + 9} = \sqrt{13}$

অথবা, বিয়োগ Calculator এ করে সরাসরি Mod বের করো।

15. যদি $z = 2 + 3i$ হয় তবে $\bar{z} - z$ এর মুখ্য আর্গুমেন্ট কত? [দি. বো. ২৫]

ক $-\frac{3\pi}{2}$ খ $-\frac{\pi}{2}$
গ $\frac{3\pi}{2}$ ঘ π

উত্তর: খ $-\frac{\pi}{2}$

ব্যাখ্যা: $z = 2 + 3i$

$\bar{z} = 2 - 3i$

$\therefore \bar{z} - z = 2 - 3i - 2 - 3i = -6i$ যা y অক্ষের ঋণাত্মক দিকে অবস্থিত।

$\therefore$ আর্গুমেন্ট $-\frac{\pi}{2}$

16. $z = (1 - i)^3$ হলে, $\arg(z)$ হবে– [ঢা. বো. '২৩]

ক $-\frac{3\pi}{4}$ খ $-\frac{\pi}{4}$
গ $\frac{\pi}{4}$ ঘ $\frac{3\pi}{4}$

উত্তর: ক $-\frac{3\pi}{4}$

ব্যাখ্যা: $\arg(z) = -\frac{3\pi}{4}$ [Using Calculator]

17. $3 - \sqrt{3}i$ এর সাধারণ আর্গুমেন্ট কোনটি? যেখানে $n \in \mathbb{Z}$. [ব. বো. ২৫]

ক $2n\pi - \frac{\pi}{3}$ খ $2n\pi - \frac{\pi}{6}$
গ $2n\pi + \frac{\pi}{6}$ ঘ $2n\pi + \frac{\pi}{3}$

উত্তর: খ $2n\pi - \frac{\pi}{6}$

ব্যাখ্যা: $3 - \sqrt{3}i$ সংখ্যাটি ৪র্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\therefore$ মুখ্য আর্গুমেন্ট $= -\tan^{-1}\left|\frac{\sqrt{3}}{3}\right| = -\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ সাধারণ আর্গুমেন্ট $= 2n\pi - \frac{\pi}{6}$

❖ উদ্দীপকের আলোকে 18 ও 19 নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

$z = \frac{2-i}{1+i}$

18. z দ্বারা কার্তেসীয় সমতলে যে বিন্দু নির্দেশ করে তার স্থানাঙ্ক কোনটি? [দি. বো. ২৫]

ক $\left(-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$ খ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

গ $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ঘ $\left(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right)$

উত্তর: খ $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

ব্যাখ্যা: $z = \frac{2-i}{1+i} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$ এর প্রতিরূপী বিন্দু $\left(\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\right)$

[Using Calculator]

19. $a = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ এবং এর অনুবন্ধী $\bar{a}$ হলে, কোনটি সত্য? [সম্মিলিত বো. '১৮]

ক $a\bar{a} = a^2$ খ $a + \bar{a} = 2a$

গ $a + \bar{a} = -1$ ঘ $\bar{a} + a^2 = -1$

উত্তর: গ $a + \bar{a} = -1$

ব্যাখ্যা: এখানে, $a = \omega \therefore \bar{a} = \omega^2$

$\therefore a + \bar{a} = \omega + \omega^2 = -1 \quad [\because 1 + \omega + \omega^2 = 0]$

Note: $\omega = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$; $\omega^2 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$

20. 11 – 60i এর বর্গমূল কত? [দি. বো. '১৯]

ক $\pm(5-6i)$ খ $\pm(6+5i)$

গ $\pm(6-5i)$ ঘ $\pm(6i-5)$

উত্তর: গ $\pm(6-5i)$

ব্যাখ্যা: যে Option কে বর্গ করলে 11 – 60i হবে সেটাই সঠিক উত্তর।

বিকল্প সমাধান: ধরি, $\sqrt{11-60i} = \pm(x-iy)$

এখানে, $r = \sqrt{(11)^2 + (-60)^2} = 61$

$\therefore x = \sqrt{\frac{r+a}{2}} = \sqrt{\frac{61+11}{2}} = 6$

$\therefore y = \sqrt{\frac{r-a}{2}} = \sqrt{\frac{61-11}{2}} = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় বর্গমূল $= \pm(6-5i)$

Note: $\sqrt{a+ib} = \pm(x+iy)$ ধরবে

এবং $\sqrt{a-ib} = \pm(x-iy)$ ধরবে

21. $\frac{1}{i}$ এর বর্গমূল কত? [কু. বো. '২৩]

ক $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$ খ $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

গ $\pm(1+i)$ ঘ $\pm(1-i)$

উত্তর: খ $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)$

ব্যাখ্যা: $\frac{1}{i} = -i$

যে অপশনকে বর্গ করলে $-i$ হয় সেটিই উত্তর,

অপশন খ $\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1-i)\right\}^2 = -i$

Note: $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$ এই দুইটা মনে রাখতে পারো।

22. $\sqrt{-6i}$ এর মান– [ঢা. বো. '২৩]

ক $\pm\sqrt{3}(1+i)$ খ $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

গ $\pm\sqrt{3}(1-i)$ ঘ $\frac{\sqrt{3}}{2}(1-i)$

উত্তর: গ $\pm\sqrt{3}(1-i)$

ব্যাখ্যা: যে অপশনকে বর্গ করলে $-6i$ হবে সেটিই উত্তর,

অপশন গ $\{\sqrt{3}(1-i)\}^2 = -6i$

23. $\sqrt{i} + \sqrt{-i}$ এর মান নিচের কোনটি?

ক 5i খ i

গ 2 ঘ $\sqrt{2}$

উত্তর: ঘ $\sqrt{2}$

ব্যাখ্যা: $\sqrt{i} + \sqrt{-i}$

$= \frac{1+i}{\sqrt{2}} + \frac{1-i}{\sqrt{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times 2$

$= \sqrt{2}$

Note: $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$

24. $\frac{5+12i}{3-4i}$ এর বর্গমূল নির্ণয় কর।

ক $\pm\left(\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i\right)$ খ $\pm(2+5i)$

গ $\pm(3+7i)$ ঘ $\pm(9+11i)$

উত্তর: ক $\pm\left(\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i\right)$

ব্যাখ্যা: $\frac{5+12i}{3-4i} = -\frac{33}{25} + \frac{56}{25}i$

যে অপশনকে বর্গ করলে $-\frac{33}{25} + \frac{56}{25}i$ পাওয়া যায় যা সঠিক উত্তর।

অপশন ক $\left(\frac{4}{5} + \frac{7}{5}i\right)^2 = -\frac{33}{25} + \frac{56}{25}i$

25. $(2i)^{-\frac{1}{2}} + (-2i)^{-\frac{1}{2}}$ এর মান কত? [য. বো. '১৯]

ক $\frac{1}{2}$ খ 1

গ 0 ঘ ∞

উত্তর: খ 1

ব্যাখ্যা: ধরি, $(2i)^{-\frac{1}{2}} + (-2i)^{-\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{\sqrt{2i}} + \frac{1}{\sqrt{-2i}}$

$= \frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$

$= 1$ [Using Calculator]

Note: $\sqrt{2i} = 1 + i$; $\sqrt{-2i} = 1 - i$ এই দুইটা মনে রাখতে পারো।

26. i এর ঘনমূল– [য. বো. ২৫]

ক $i, \frac{1}{2}(i+\sqrt{3}), \frac{1}{2}(i-\sqrt{3})$

খ $-i, \frac{1}{2}(i+\sqrt{3}), \frac{1}{2}(i-\sqrt{3})$

গ $-i, \frac{1}{2}(i+\sqrt{3}), \frac{1}{2}(-i-\sqrt{3})$

ঘ $i, \frac{1}{2}(-i+\sqrt{3}), \frac{1}{2}(-i-\sqrt{3})$

উত্তর: খ $-i, \frac{1}{2}(i+\sqrt{3}), \frac{1}{2}(i-\sqrt{3})$

ব্যাখ্যা: ধরি, $x = \sqrt[3]{i}$

$\Rightarrow x^3 = i$

$\Rightarrow x^3 = (-i)^3$

$\Rightarrow \left(\frac{x}{-i}\right)^3 = 1$

$\Rightarrow \frac{x}{-i} = 1, \omega, \omega^2$

$\therefore x = -i, -i\omega, -i\omega^2$

$= -i, -i\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right), -i\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)$

$= -i, \frac{i+\sqrt{3}}{2}, \frac{i-\sqrt{3}}{2}$

27. $\sqrt[4]{-81}$ এর মান কত?

ক $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$ খ $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1 \pm 2i)$

গ $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(2 \pm i)$ ঘ $\pm\frac{\sqrt{3}}{2}(1 \pm i)$

উত্তর: ক $\pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$

ব্যাখ্যা: $\sqrt[4]{-n^2} = \pm\sqrt{\frac{n}{2}}(1 \pm i)$

$\therefore \sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{-9^2} = \pm\sqrt{\frac{9}{2}}(1 \pm i) = \pm\frac{3}{\sqrt{2}}(1 \pm i)$

অথবা, Option গুলোর মধ্যে যেটার পাওয়ার 4 দিলে – 81 আসে ওটাই উত্তর। Use EX/CW Calculator.

28. $z = x + iy$ হলে, $z\bar{z} = 1$ সমীকরণের জ্যামিতিক রূপ কোনটি? [কু. বো. '১৯]

ক অধিবৃত্ত খ বৃত্ত

গ পরাবৃত্ত ঘ উপবৃত্ত

উত্তর: খ বৃত্ত

ব্যাখ্যা: $z\bar{z} = 1$

$\Rightarrow (x + iy)(x - iy) = 1$

$\Rightarrow x^2 - i^2y^2 = 1$

$\therefore x^2 + y^2 = 1$; যা বৃত্ত নির্দেশ করে।

29. $p = x + iy$ হলে, $|p - 2| = 3$ সমীকরণটি নির্দেশ করে– [সি. বো. '২৩]

ক বৃত্ত খ সরলরেখা

গ বিন্দুবৃত্ত ঘ উপবৃত্ত

উত্তর: ক বৃত্ত

ব্যাখ্যা: $|x + iy - 2| = 3$

$\Rightarrow (x-2)^2 + y^2 = 9$; যা বৃত্ত নির্দেশ করে।

অথবা, $|z + a| = k$ আকৃতির সমীকরণ বৃত্ত নির্দেশ করে এভাবেও মনে রাখতে পারো।

30. $z = x + iy$ হলে, $|z + 1| = |z - 2|$ দ্বারা নির্দেশিত সঞ্চারপথ কোনটি? [য. বো. '২৩]

ক সরলরেখা খ বৃত্ত

গ পরাবৃত্ত ঘ উপবৃত্ত

উত্তর: ক সরলরেখা

ব্যাখ্যা: $|x + iy + 1| = |x + iy - 2|$

$\Rightarrow (x+1)^2 + y^2 = (x-2)^2 + y^2$

$\Rightarrow (x+1)^2 = (x-2)^2$

$\Rightarrow x^2 + 2x + 1 = x^2 - 4x + 4$

$\Rightarrow 6x - 3 = 0$

$\therefore 2x - 1 = 0$; যা সরলরেখা নির্দেশ করে।

31. $z = x - 2iy$ হলে $z\bar{z} = 7$ এর সঞ্চারপথ একটি– [চ. বো. '১৯]

ক পরাবৃত্ত খ উপবৃত্ত

গ বৃত্ত ঘ অধিবৃত্ত

উত্তর: খ উপবৃত্ত

ব্যাখ্যা: $z = x - 2iy$; $\bar{z} = x + i2y$

$z\bar{z} = 7$

$\Rightarrow (x - 2iy)(x + i2y) = 7$

$\Rightarrow x^2 - (2iy)^2 = 7$

$\Rightarrow x^2 + 4y^2 = 7$

$\therefore \frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{\frac{7}{4}} = 1$; যা উপবৃত্ত নির্দেশ করে।

Note: $ax^2 + by^2 = c$ এই টাইপের সমীকরণের ক্ষেত্রে–

(i) বৃত্ত হতে হলে x^2 ও y^2 এর সহগ সমান হতে হবে।

(ii) উপবৃত্তের সমীকরণের x^2 ও y^2 এর সহগ অসমান এবং উভয়ের সহগের চিহ্ন একই হবে।

(iii) অধিবৃত্তের সমীকরণে x^2 ও y^2 এর যেকোনো একটির সহগ ধনাত্মক এবং অন্যটির সহগ ঋণাত্মক হবে।

32. $z = 2x + i3y$ হলে, $|z| = 1$ কি নির্দেশ করে– [চ. বো. '২৩]

ক বৃত্ত খ পরাবৃত্ত
গ উপবৃত্ত ঘ অধিবৃত্ত

উত্তর: গ উপবৃত্ত

ব্যাখ্যা: $|2x + i3y| = 1$

$\Rightarrow 4x^2 + 9y^2 = 1$ যা একটি উপবৃত্ত।

33. যদি $a = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ হয়, তবে a^6 এর মান হবে– [রা. বো. ২৫]

ক -1 খ i
গ 1 ঘ $-i$

উত্তর: ঘ $-i$

ব্যাখ্যা: Calculator দিয়ে Direct মান বের করে ফেলা যায়।

অথবা, $a = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow a^2 = i$

$\therefore a^6 = (a^2)^3 = i^3 = -i$

Note: $\sqrt{i} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$; $\sqrt{-i} = \frac{1-i}{\sqrt{2}}$

34. n এর ধনাত্মক সর্বনিম্ন অখণ্ড মান বের কর যার জন্য $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$

ক 2 খ 3
গ 6 ঘ 4

উত্তর: ঘ 4

ব্যাখ্যা: $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n = 1$

$\Rightarrow i^n = 1 \left[\text{Using Calculator } \frac{1+i}{1-i} = i\right]$

$\therefore$ n এর সর্বনিম্ন মান 4 $[i^4 = 1]$

Note: $\frac{1+i}{1-i} = i$; $\frac{1-i}{1+i} = -i$

35. $x = 2 - i$ হলে, $x^3 - 3x^2 + x + 10$ এর মান নির্ণয় কর।

ক 4 খ 2
গ 5 ঘ -2

উত্তর: গ 5

ব্যাখ্যা: $x^3 - 3x^2 + x + 10 = 5$

[$x = 2 - i$ বসিয়ে Using Calculator]

36. $x + iy = i^{-2021} + 2(\omega)^{-2019}$ হলে, $\frac{y}{x} = ?$ [রা. বো. '২২]

ক $\frac{1}{2}$ খ $-\frac{1}{2}$
গ 2 ঘ -2

উত্তর: খ $-\frac{1}{2}$

ব্যাখ্যা: $x + iy = i^{-2021} + 2(\omega)^{-2019}$

$= \frac{1}{i^{2021}} + \frac{2}{\omega^{2019}}$

$= \frac{1}{i} + 2$ [ω^{2019}, 3 দ্বারা বিভাজ্য]

$= -i + 2$

সহগ সমীকৃত করে, $x = 2$

$y = -1$

$\therefore \frac{y}{x} = -\frac{1}{2}$

Note: $\frac{1}{i} = -i$

37. $\sqrt{-3 + \sqrt{-3 + \sqrt{-3 + \ldots\ldots \infty}}} = ?$

ক $-\sqrt{3}i$ খ $\frac{-1 \pm \sqrt{11}i}{2}$
গ $\frac{1 \pm \sqrt{-11}}{2}$ ঘ $\frac{1 \pm \sqrt{11}}{2}$

উত্তর: গ $\frac{1 \pm \sqrt{-11}}{2}$

ব্যাখ্যা: ধরি, $x = \sqrt{-3 + \sqrt{-3 + \sqrt{-3 + \ldots\ldots \infty}}}$

$\Rightarrow x = \sqrt{-3 + x}$

$\Rightarrow x^2 = -3 + x$

$\Rightarrow x^2 - x + 3 = 0$

$\therefore x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times 3}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{-11}}{2}$

38. $1 + \omega^{19999} + \omega^{15557} = ?$

ক 0 খ 1
গ -1 ঘ 2

উত্তর: ক 0

ব্যাখ্যা: $1 + \omega^{19999} + \omega^{15557}$

$= 1 + \omega + \omega^2$

$= 0$

Note: $1 + \omega + \omega^2 = 0$

$\omega^3 = 1, \omega^6 = 1, \omega^9 = 1, \omega^{3n} = 1$

39. এককের একটি জটিল ঘনমূল ω হলে, $\omega^{6n \times 3} = ?$ [ব. বো. '১৭]

ক -1 খ 1
গ ω ঘ ω^2

উত্তর: খ 1

ব্যাখ্যা: $\omega^{3n} = 1$

$\therefore \omega^{6n \times 3} = \omega^{18n} = (\omega^{3n})^6 = 1$

40. এককের কাল্পনিক ঘনমূল দুইটির গুণফল কত?

ক -1 খ $-\frac{1}{2}$
গ $\frac{1}{2}$ ঘ 1

উত্তর: ঘ 1

ব্যাখ্যা: এককের ঘনমূল তিনটি হচ্ছে: $1, \omega, \omega^2$। এদের মধ্যে ω ও ω^2 এই দুইটি কাল্পনিক/জটিল ঘনমূল।

$\therefore$ এককের কাল্পনিক ঘনমূল দুইটির গুণফল $\omega \cdot \omega^2 = \omega^3 = 1$

Note: এককের ঘনমূল তিনটির যোগফল, $1 + \omega + \omega^2 = 0$ এককের কাল্পনিক ঘনমূল দুইটির যোগফল, $\omega + \omega^2 = -1$ কাল্পনিক ঘনমূলদ্বয়ের একটি অপরটির বর্গের সমান, $\omega = (\omega^2)^2$

41. $\sqrt[3]{-i}$ এর মূলত্রয়ের সমষ্টি কত? [কু. বো. ২৫]

ক -2 খ $-2i$
গ 0 ঘ $2i$

উত্তর: গ 0

ব্যাখ্যা: কোনো সংখ্যার ঘনমূলত্রয়ের সমষ্টি 0।

42. $\frac{1}{\omega^{2015}} + \frac{1}{\omega^{2016}} + \frac{1}{\omega^{2017}}$ এর মান– [চ. বো. '২২]

ক $-2\omega^2$ খ $-\omega$
গ 0 ঘ 3

উত্তর: গ 0

ব্যাখ্যা: $\frac{1}{\omega^{2015}} + \frac{1}{\omega^{2016}} + \frac{1}{\omega^{2017}}$

$= \frac{1}{\omega^2} + \frac{1}{1} + \frac{1}{\omega}$

$= \omega + 1 + \omega^2$

$= 0$

$\omega^3 = 1 \quad \therefore \frac{1}{\omega^2} = \omega$ এবং $\frac{1}{\omega} = \omega^2$

43. ω এককের জটিল ঘনমূল হলে $\frac{3}{\omega^{16} + \omega^{29} - 2}$ = কত? [দি. বো. ২৫]

ক -1 খ 1
গ 3 ঘ 4

উত্তর: ক -1

ব্যাখ্যা: $\frac{3}{\omega^{16} + \omega^{29} - 2}$

$= \frac{3}{\omega + \omega^2 - 2}$

$= \frac{3}{-1-2} = -1$

44. $x = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{-3})$ এবং $y = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{-3})$ হলে, $1 - x - y + xy$ এর মান কত? [ব. বো. '২২]

ক -2 খ 2
গ 3 ঘ -3

উত্তর: গ 3

ব্যাখ্যা: $x \to \omega$; $y \to \omega^2$

$\therefore 1 - \omega - \omega^2 + \omega^3 = 2 - (\omega + \omega^2) = 3$

45. ω এককের কাল্পনিক ঘনমূল হলে, $(\omega^5 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8)(\omega^{-1} + \omega^{-3} + \omega^{-5} + \omega^{-7})$ এর মান– [দি. বো. '২৩]

ক ω খ ω^2
গ 1 ঘ 0

উত্তর: ক ω

ব্যাখ্যা: $(\omega^5 + \omega^6 + \omega^7 + \omega^8)(\omega^{-1} + \omega^{-3} + \omega^{-5} + \omega^{-7})$

$= \omega^5 \times \omega^{-1} = \omega^4 = \omega$

Note: $\omega^n + \omega^{n+1} + \omega^{n+2} = 0$

46. এককের একটি কাল্পনিক ঘনমূল ω হলে, $(1 + \omega - \omega^2)(\omega + \omega^2 - 1)(\omega^2 + 1 - \omega)$ এর মান কত? [সি. বো. '২২]

ক -8 খ 8 গ 0 ঘ 1

উত্তর: ক -8

ব্যাখ্যা: $(1 + \omega - \omega^2)(\omega + \omega^2 - 1)(\omega^2 + 1 - \omega)$

$= (-2\omega^2) \times (-1-1) \times (-2\omega) = -8$

47. ω এককের কাল্পনিক ঘনমূল হলে, $(1 - \omega^4)(1 - \omega^8)(1 - \omega^{10})(1 - \omega^{14})$ এর মান হলো– [চ. বো. '১৯]

ক -1 খ 1
গ 3 ঘ 9

উত্তর: ঘ 9

ব্যাখ্যা: $(1 - \omega^4)(1 - \omega^8)(1 - \omega^{10})(1 - \omega^{14})$

$= (1 - \omega)(1 - \omega^2)(1 - \omega)(1 - \omega^2)$

$= \{(1 - \omega)(1 - \omega^2)\}^2 = \{(1 - \omega^2 - \omega + \omega^3)\}^2$

$= (1 + 1 + 1)^2 = 9$

48. এককের জটিল ঘনমূলদ্বয় p ও q হলে, $p^5 + q^5$ = কত? [য. বো. '২৩]

ক -1 খ 1
গ ω ঘ ω^2

উত্তর: ক -1

ব্যাখ্যা: $p = \omega$; $q = \omega^2$

$\therefore p^5 + q^5 = \omega^5 + (\omega^2)^5 = \omega^2 + \omega = -1$

49. $n \in \mathbb{Z}$ হলে– [ঢা. বো. '২৩]

(i) $i^{4n} = 1$
(ii) $(i)^{2n+1} = -1$
(iii) $(i)^{8n+4} = 1$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: খ i ও iii

ব্যাখ্যা: (i) $i^{4n} = (i^4)^n = 1$

(ii) $i^{2n+1} = i^{2n}.i = (i^2)^n.i = (-1)^n.i$

(iii) $i^{8n+4} = i^{8n}.i^4 = (i^8)^n.1 = 1$

50. $\frac{-1-\sqrt{3}}{2}$ জটিল সংখ্যাটির– [কু. বো. ২৫]

i. মডুলাস 1

ii. মুখ্য আর্গুমেন্ট $-\frac{2\pi}{3}$

iii. পোলার আকার $e^{-\frac{2\pi}{3}}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: $\frac{-1-\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ জটিল সংখ্যাটির,

(i) মডুলাস $= \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}} = 1$

(ii) মুখ্য আর্গুমেন্ট $= -\pi + \tan^{-1}\left|\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}}\right|$

$= -\pi + \tan^{-1}\sqrt{3}$

$= -\pi + \frac{\pi}{3} = -\frac{2\pi}{3}$

(iii) পোলার আকার, $r(\cos\theta + i\,\text{isn}\theta)$

$= \cos\left(\frac{-2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{-2\pi}{3}\right)$

51. অনুবন্ধী জটিল সংখ্যার ক্ষেত্রে– [সি. বো. '২২]

(i) $\overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

(ii) $\bar{\bar{z}} = z$

(iii) $\overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1.\bar{z}_2$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i), (ii) ও (iii) জটিল সংখ্যার ধর্ম হিসেবে মনে রাখ।

অথবা, z_1 ও z_2 এর Random value ধরে বামপক্ষ ও ডানপক্ষ মিলাতে পারো।

52. z_1 ও z_2 দুটি জটিল সংখ্যা হলে– [য. বো. ২৫]

i. $|z_1 - z_2| \le |z_1| + |z_2|$

ii. $\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2)$

iii. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: জটিল সংখ্যার ধর্ম

53. z একটি জটিল সংখ্যা হলে– [ব. বো. '২৩]

(i) $\frac{|z|}{|\bar{z}|} = 1$

(ii) $z.\bar{z} = |\bar{z}|^2$

(iii) $\arg\left(\frac{z}{\bar{z}}\right) = \arg(z) + \arg(\bar{z})$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: (i) $z = x + iy$ হলে,

$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2+y^2} \quad \therefore \frac{|z|}{|\bar{z}|} = 1$

(ii) $z.\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |\bar{z}|^2$

(iii) $\arg\left|\frac{z}{\bar{z}}\right| = \arg(z) - \arg(\bar{z})$

❖ **উদ্দীপকের আলোকে 54 নং প্রশ্নের উত্তর দাও।**

'8' এর জটিল ঘনমূল z_1 এবং z_2

54. উদ্দীপকের আলোকে– [ব. বো. ২৫]

i. $\text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) = 0$

ii. $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 1$

iii. $z_1 z_2$ **একটি বাস্তব সংখ্যা**

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii
গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$

$z_2 = -1 - \sqrt{3}i$

(i) $\text{Arg}(z_1) + \text{Arg}(z_2) = \text{Arg}(z_1z_2)$

$z_1z_2 = (-1)^2 + (\sqrt{3})^2 = 4$; যা একটি বাস্তব সংখ্যা

$\therefore \text{Arg}(z_1z_2) = 0$

(ii) $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{\sqrt{(1)^2+(\sqrt{3})^2}}{\sqrt{(-1)^2+(\sqrt{3})^2}} = 1$

$\therefore$ i, ii ও iii সঠিক।

55. $z = -i + 1$ [চ. বো. '২৩]

(i) z এর মডুলাস $\sqrt{2}$

(ii) z এর আর্গুমেন্ট $\frac{-\pi}{4}$

(iii) $z\bar{z} = z + \bar{z}$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ঘ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) এবং (ii) [Using Calculator]

(iii) $z\bar{z} = (-i+1)(i+1) = 2$

$z + \bar{z} = -i + 1 + i + 1 = 2$

$\therefore z\bar{z} = z + \bar{z}$

56. এককের কাল্পনিক ঘনমূল a ও b হলে– [ঢা. বো. ২৫]

i. $a^2 = b$

ii. $a^2 + b^2 = i^2$

iii. $ab = i^3$

নিচের কোনটি সঠিক?

ক i ও ii খ i ও iii গ ii ও iii ঘ i, ii ও iii

উত্তর: ক i ও ii

ব্যাখ্যা: এককের কাল্পনিক ঘনমূল, $\omega = a$, $\omega^2 = b$

(i) $a^2 = \omega^2 = b$

(ii) $a^2 + b^2 = \omega^2 + (\omega^2)^2 = \omega^2 + \omega = -1 = i^2$

(iii) $ab = \omega.\omega^2 = \omega^3 = 1$ এবং $i^3 = -i$

57. $\sqrt[3]{1}$ **এর মূলত্রয়ের–** [চ. বো. '২২]

(i) যোগফল শূন্য

(ii) দুইটি জটিল

(iii) একটি মূল অপর একটি মূলের বর্গের সমান

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii

ⓖ ii ও iii ⓖ i, ii ও iii

উত্তর: ⓖ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: (i) মূলত্রয়ের যোগফল $= 1 + \omega + \omega^2 = 0$

(ii) ω, ω^2 এই দুইটি জটিল মূল।

(iii) একটি মূল অপরটির বর্গের সমান।

58. একের জটিল ঘনমূল x ও y হলে– [ঢা. বো. '১৯]

(i) $x^2 = y$

(ii) $x^2 + y^2 = i^2$

(iii) $x^2y^2 = i^4$

নিচের কোনটি সঠিক?

ⓚ i ও ii ⓚ i ও iii

ⓖ ii ও iii ⓖ i, ii ও iii

উত্তর: ⓖ i, ii ও iii

ব্যাখ্যা: $x = \omega$ ও $y = \omega^2$

(i) $x^2 = y \therefore \omega^2 = \omega^2$

(ii) $x^2 + y^2 = \omega^2 + \omega^4 = \omega^2 + \omega = -1 = i^2$

(iii) $x^2y^2 = \omega^2 . \omega^4 = \omega^2 . \omega = \omega^3 = 1 = i^4$

Prepared By

Abhi Datta Tushar

ME'15, BUET

CEO, ACS Group

Managing Director, Rhombus Publications

Founder: Rhombus Parallel Science Hub

https://www.rhombuspublications.com

https://aparsclassroom.com/shop/abhi/